№ 9.9

$xy' - 7y = 6y^2$

$x\frac{dy}{dx} = 6y^2 + 7y \quad (1)$

$\frac{dy}{6y^2+7y} = \frac{dx}{x} \quad (2)$

Интегрирую обе части равенства.

$$\int \frac{dy}{6y^2+7y} = \int \frac{dy}{y(6y+7)}$$

Разложим подынтегральную дробь на слагаемые

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{6y+7} = \frac{6Ay + 7A + By}{y(6y+7)} = \frac{1}{y(6y+7)}$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 7A = 1 \\ 6A + B = 0 \end{cases}$$

откуда находим $A = \frac{1}{7}$, $B = -\frac{6}{7}$

$$\int \frac{dy}{y(6y+7)} = \int \left(\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{y} - \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6y+7}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{dy}{y} - \frac{6}{7}\int \frac{dy}{6y+7} = \frac{1}{7}\ln y - \frac{1}{7}\int \frac{d(6y+7)}{6y+7} =$$

$$= \frac{1}{7}\ln y - \frac{1}{7}\ln(6y+7)$$

~~$\int \frac{dx}{x} = \ln x$~~ Интеграл от правой части равенства (2): $\int \frac{dx}{x} = \ln x$

Приравниваю интегралы от левой и правой частей равенства (2):

$$\frac{1}{7}\ln y - \frac{1}{7}\ln(6y+7) = \ln x + C$$

$$\frac{1}{7}\ln \frac{y}{6y+7} = \ln Cx$$

$$\ln\left(\frac{y}{6y+7}\right)^{1/7} = \ln Cx$$

Решение исходного уравнения имеет вид:

$$\left(\frac{y}{6y+7}\right)^{1/7} = Cx$$