Дом. раб. №2

№1а

$y = x^x$

Применяя логарифмическое дифференцирование, последовательно нахожу:

$\ln y = x \ln x$

$\frac{y'}{y} = x' \ln x + x(\ln x)'$

$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$y' = y(1 + \ln x)$

$y' = x^x(1 + \ln x)$

№1б

$y = (\sin x)^{\cos x}$

Применяя логарифмическое дифференцирование, последовательно нахожу:

(2) $\ln y = \cos x \cdot \ln(\sin x)$

$$\frac{y'}{y} = (\cos x)' \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot (\ln(\sin x))'$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \frac{(\sin x)'}{\sin x}$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x \cdot \ln(\sin x)$$

$$y' = (\sin x)^{\cos x} \cdot (\cos x \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x \cdot \ln(\sin x))$$

№2

$$\frac{2(x+1)}{\ln 2} + y - \frac{1}{2} = 0$$

Выражаю y через x:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{2(x+1)}{\ln 2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\ln 2} \cdot (x+1)$$

$$y' = \left(\frac{1}{2}\right)' - \left[\frac{2}{\ln 2} \cdot (x+1)\right]'$$

$$y' = 0 - \frac{2}{\ln 2}\left(x' + 1'\right)$$

$$y' = 0 - \frac{2}{\ln 2}\left(1 + 0\right)$$

$$y' = -\frac{2}{\ln 2}$$

№3

$$\sqrt[3]{8 + 0.0001 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$\sqrt[3]{8 + 0{,}0294}$$

Будем рассматривать $\sqrt[3]{8+0{,}0294}$ как частное значение функции $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$ при $x = 0{,}0294 = x_1$. Воспользуемся формулой

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,dx \qquad (*)$$

Пусть $x_0 = 0$, тогда $f(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2$

$$f'(x_0) = \frac{1}{3}\left(8+x\right)^{-2/3}\Big|_{x_0=0} = \frac{1}{3}\cdot 8^{-2/3} = \frac{1}{3}\cdot 2^{-2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

(4) $dx = x_1 - x_0 = 0{,}0294$

Подставляя в формулу (*), получим

$\sqrt[3]{8+0{,}0294} \approx f(x_0) + f'(x_0)dx = 2 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}0294 =$

$= 2{,}00245$

№4

$\sin 2{,}7 = \sin(\pi - 0{,}4416) = \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{6} - 0{,}082\right)\right) =$

$= \sin\left(\frac{\pi}{6} - 0{,}082\right)$

Будем рассматривать $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 0{,}082\right)$ как частное значение функции $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

при $x = 0{,}082 = x_1$

Пусть $x_0 = 0$, тогда $f(x_0) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cancel{f'(x_0) = (\sin x)'\Big|_{x_0} =}$

$f'(x_0) = \left[\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right]'\Big|_{x_0=0} = \left(\frac{\pi}{6} - x\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\Big|_{x_0=0} =$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\Big|_{x_0=0} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$dx = x_1 - x_0 = 0{,}082$

Подставляя в формулу (*) из предыдущей задачи, получим:

$\sin 2{,}7 = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 0{,}082\right) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,dx =$

$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}082 \approx 0{,}42899$