Для Мария Сидорова.

В решениях задач для нормальной функции распределения используется обозначение $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Задание №1. Стоимость некой ценной бумаги — случайная величина X — имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 15$ ден.ед. и средним квадратичным отклонением $\sigma = 0.2$ ден.ед. Найти вероятность того, что а) стоимость отклонится от среднего значения по модулю более чем на 0.3 ден.ед.; б) ценная бумага будет стоить от 10 ден.ед. до 16 ден.ед.; в) стоимость превысит 18 день.ед.

Решение.

А. Найдём вероятность противоположного события: стоимость НЕ отклонится от среднего значения по модулю более чем на 0.3 ден.ед. Для этого воспользуемся формулой

$$P(|X - m| < l) = 2\Phi^*\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 1.$$

В нашем случае $m = 15$, $l = 0.3$, поэтому
$P(|X - 15| < 0.3) = 2\Phi^*\left(\frac{0.3}{0.2}\right) - 1 = 2\Phi^*(1.5) - 1.$
Воспользовавшись таблицей значений функции нормального распределения находим $\Phi^*(1.5) = 0.9332$, следовательно $P(|X - 15| < 0.3) = 0.8664$. Таким образом, вероятность противоположного события равна 0.8664, а искомая вероятность равна $1 - 0.8664 = 0.1336$.

Б. Воспользуемся формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right).$$

Подставляем в эту формулу известные значения:

$$P(10 < x < 16) = \Phi^*\left(\frac{16 - 15}{0.2}\right) - \Phi^*\left(\frac{10 - 15}{0.2}\right)$$

$$P(10 < x < 16) = \Phi^*(5) - \Phi^*(-25)$$

так как $\Phi^*(-x) = 1 - \Phi^*(x)$, то $P(10 < x < 16) = \Phi^*(5) - 1 + \Phi^*(25)$. Воспользовавшись таблицей значений функции нормального распределения находим $\Phi^*(5) \approx 1$ и $\Phi^*(25) \approx 1$, следовательно $P(10 < x < 16) = 1$.

В. Воспользуемся той же формулой: $P(18 < x < \infty) = 1 - \Phi^*\left(\frac{18-15}{0.2}\right) = 1 - 1 = 0$.

Ответ: (а) 0.1336; (б) 1; (в) 0.
Замечание. Если вспомнить правило трёх сигма, то можно прямо в уме сосчитать, что стоимость ценной бумаги укладывается в диапазон 15 ± 0.6ден.ед. и решение пунктов (б) и (в) становится очевидным.

Задание №2. Известно, что отклонение диаметра вала от номинального размера распределено нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0.05$ мкм. При изготовлении валов допустимым отклонением их диаметра от номинального размера считается 0.1 мкм. Такие валы считаются доброкачественными. Определить долю бракованных валов в партии из 1000 валов.
Решение. Обозначим через X отклонение диаметра вала от номинального размера. Тогда $M(X) = 0$. Воспользуемся формулой $P(|X| < \delta) = 2\Phi^*\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1$ Подставив $\delta = 0.1$ и $\sigma = 0.05$, получим $P(|X| < 0.1) = 2\Phi^*\left(\frac{0.1}{0.05}\right) - 1 = 2\Phi^*(2) - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$. Таким образом, вероятность отклонения, меньшего 0.1 мкм, равна 0.9544. Отсюда следует, что примерно 954 вала из 1000 окажутся доброкачественными, а остальные 46 будут бракованными.
Ответ: в партии из 1000 валов будет 46 бракованных.
Замечание. Примерно оценить количество доброкачественных валов можно, если вспомнить, что в диапазон $\pm 2\sigma$ попадают 96% всех значений нормально распределённой случайной величины.

Задание №3. Нагрузка X на стержень подчиняется нормальному закону распределения с числовыми характеристиками: $M(X) = 5$кг, $\sigma(X) = 0.05$кг. Определить усилие, разрушающее стержень, если вероятность разрушения стержня равна 0.055.
Решение. Вероятность того, что стержень НЕ разрушиться равна $1 - 0.055 = 0.945$. Из равенства $\Phi^*\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = 0.945$ по соответствующей таблице находим $\frac{x-m}{\sigma} = 1.6$. По условию задачи $\sigma = 0.05$, $m = 5$. Следовательно, $x = 1.6 \cdot 0.05 + 5 = 5.08$, другими словами, при нагрузке менее 5.08кг стержень еще НЕ разрушается.
Ответ: усилие, разрушающее стержень равно 5.08кг.

Задание №4. Нормально распределённая случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = Ae^{-\frac{(x-5)^2}{32}}$. Определить: а) значение коэффициента A; б) вероятность попадания случайной величины в интервал $(3; 9)$; в) моду и медиану случайной величины X. Изобразить эскиз графика плотности распределения.
Решение. Воспользуемся тем, что плотность распределения случай-

ной величины X, распределённой по нормальному закону с параметрами m, σ равна:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Сравним это выражение с приведённой в задании плотностью распределения:

$$f(x) = Ae^{-\frac{(x-5)^2}{32}}$$

и сразу же получаем:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2\cdot 4^2}}$$

Ответ на вопрос (а): значение коэффициента $A = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}$. Попутно заметим, что $\sigma = 4$ и $m = 5$.

Теперь найдём вероятность попадания случайной величины X в интервал от $\alpha = 3$ до $\beta = 9$. Для этого воспользуемся формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right).$$

Подставляем в эту формулу известные значения:

$$P(3 < x < 9) = \Phi^*\left(\frac{9-5}{4}\right) - \Phi^*\left(\frac{3-5}{4}\right)$$

$$P(3 < x < 9) = \Phi^*(1) - \Phi^*(-0.5)$$

так как $\Phi^*(-x) = 1 - \Phi^*(x)$, то $P(3 < x < 9) = \Phi^*(1) - 1 + \Phi^*(0.5)$. Воспользовавшись таблицей значений функции нормального распределения находим $\Phi^*(1) = 0.8413$ и $\Phi^*(0.5) = 0.6915$

$$P(3 < x < 9) = 0.8413 - 1 + 0.6915 = 0.5328$$

Ответ на вопрос (б): вероятность попадания случайной величины в интервал $(3; 9)$ равна 0.5328.

Для непрерывной случайной величины модой является то значение, в котором плотность вероятности максимальна. Медианой случайной величины X называется такое значение Me, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина больше или меньше Me. В случае симметричного модального распределения медиана совпадает с математическим ожиданием и модой. Следовательно ответ на вопрос (в)

такой: мода и медиана заданной случайной величины равны 5. Эскиз графика плотности распределения показан на рисунке 1.

Задание №5. Две независимые случайные величины X и Y распределены нормально $X \sim N(-2;3)$, $Y \sim N(4;2)$. Найти:
а) $M(Z)$ и $D(Z)$ случайной величины $Z = 2X - 3Y$;
б) $M(X^2)$.

Решение. Для решения потребуются следующие свойства математического ожидания:

1. $M(aX + b) = aMX + b$, где a, b — постоянные.
2. $M(X_1 + X_2) = MX_1 + MX_2$.
3. $M(X_1X_2) = MX_1 \cdot MX_2$ для независимых случайных величин X_1 и X_2.

$M(Z) = M(2X-3Y) = M(2X)-M(3Y) = 2MX-3MY = 2\cdot(-2)-3\cdot 4 =$
$= -16$
$M(X^2) = M(X \cdot X) = MX \cdot MX = (-2)\cdot(-2) = 4$
Теперь воспользуемся следующими свойствами дисперсии:

1. $D(aX + b) = a^2DX$
2. $D(X + Y) = DX + DY$ для независимых случайных величин X и Y.

$D(Z) = D(2X - 3Y) = D(2X) + D(-3Y) = 2^2D(X) + (-3)^2D(Y) =$
$= 4DX + 9DY = 4 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 30$
Ответ:
(а) $M(Z) = -16$, $D(Z) = 30$
(б) $M(X^2) = 4$

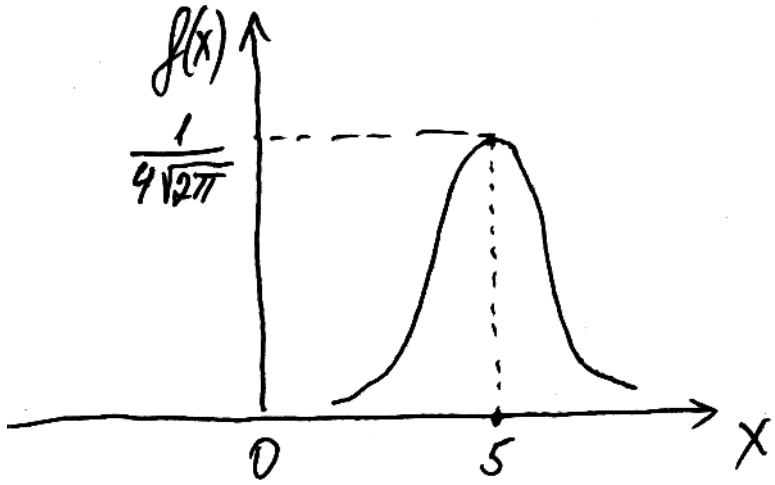

Рис 1.