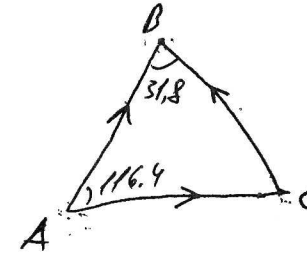
Носов, вариант 7

1) Сначала найдем направляющие векторы R прямых, затем по формуле $\cos\varphi = \frac{R_1 R_2}{|R_1||R_2|}$ вычислим угол между прямыми.



прямая AB: $R_{AB} = (5-3, 5-3, -2+1) = (2, 2, -1)$

прямая CB: $R_{CB} = (5-4, 5-1, -2-1) = (1, 4, -3)$

прямая AC: $R_{AC} = (4-3, 1-3, 1+1) = (1, -2, 2)$

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{R_{AB}R_{CB}}{|R_{AB}||R_{CB}|} = \frac{2*1+2*4+1*3}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{1+16+9}} = \frac{13}{3\sqrt{26}}$$

$-1+8+6=13$

$$\widehat{ABC} = \arccos\frac{13}{3\sqrt{26}} \approx 31{,}8^\circ$$

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{R_{AB}R_{AC}}{|R_{AB}||R_{AC}|} = \frac{\cancel{2*1}-2*2\cancel{-1*2}}{3\sqrt{1+4+4}} = \frac{-4}{9}$$

$$\widehat{BAC} = \arccos\left(-\frac{4}{9}\right) \approx 116{,}4^\circ$$

$$\cos\widehat{ACB} = \frac{R_{AC}R_{BC}}{|R_{AB}||R_{BC}|} = \frac{(1,-2,2)(-1,-4,3)}{3\sqrt{26}} = \frac{-1*1+2*4+2*3}{2\sqrt{26}} = \frac{13}{3\sqrt{26}}$$

$$\cancel{\cos}\ \widehat{ACB} = \arccos\frac{13}{3\sqrt{26}} \approx 31.8^\circ$$

Проверка: $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 31.8 + 116.4 + 31.8 = 180$

Ответ: $\widehat{ABC} = 31.8^\circ$, $\widehat{BAC} = 116.4^\circ$, $\widehat{ACB} = 31.8^\circ$

$|AB| = |R_{AB}| = 3$, $|AC| = |R_{AC}| = 3$, $|BC| = |R_{BC}| = \sqrt{26}$

Задача №2

$\bar{c}_1 = 5(-2,4,1)+3(1,-2,7) = (-10,20,5)+(3,-6,21) =$

$= (-7,14,26)$

$\bar{c}_2 = 2(-2,4,1)-(1,-2,7) = (-4,8,2)-(1,-2,7) = (-5,10,-5)$

$\frac{-7}{-5} = \frac{14}{10} \neq \frac{26}{-5}$ => не существует чисел α и β, одновременно не равных нулю, таких что $\alpha\bar{c}_1+\beta\bar{c}_2=0$ => векторы $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$ не коллинеарны.

$|\bar{c}_2| = \sqrt{5^2+10^2+5^2} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$

$\Pi_{p\bar{b}}\bar{c}_2 = ?$ Сначала найдем ~~со~~ косинус угла между $\bar{c}_2$ и $\bar{b}$:

$-5-20-35$

$$\cos\varphi = \frac{(-5,10,-5)(1,-2,7)}{5\sqrt{6}*\sqrt{1+2^2+7^2}} = \frac{-5*1-10*2-5*7}{5\sqrt{6}\sqrt{54}} = \frac{-60}{5\sqrt{324}} =$$

$$= \frac{-60}{5*18} = -\frac{60}{90} = -\frac{2}{3}$$

$$\Pi_{p\bar{b}}\bar{c}_2 = |c_2|\cos\varphi = 5\sqrt{6}*\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10\sqrt{6}}{3}$$

Задача №3

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=\bar{p}+3\bar{q}$ и $\bar{b}=\bar{p}+2\bar{q}$, если $|\bar{p}|=\frac{1}{5}$, $|\bar{q}|=1$, $(\widehat{\bar{p},\bar{q}})=\frac{\pi}{2}$ и найти его высоту.

Решение:

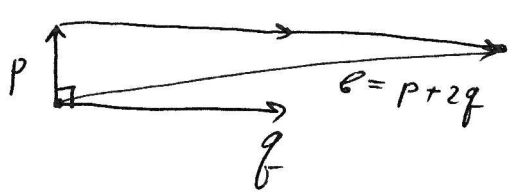
$$S=|\bar{a}\times\bar{b}|$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=(\bar{p}-3\bar{q})\times(\bar{p}+2\bar{q})=\bar{p}\bar{p}-3\bar{q}\bar{p}+2\bar{p}\bar{q}+6\bar{q}\bar{q}=$$

$$=-3\bar{q}\bar{p}+2\bar{p}\bar{q}=3\bar{p}\bar{q}+2\bar{p}\bar{q}=5\bar{p}\bar{q}=5|\bar{p}||\bar{q}|\sin\varphi=$$

$$=5*\frac{1}{5}*1*\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$S=1. \qquad h=\frac{S}{|\bar{b}|}$$



$$|\bar{b}|=\sqrt{|\bar{p}|^2+|2\bar{q}|^2}=\sqrt{\frac{1}{25}+4}=\frac{\sqrt{101}}{5}$$

$$h=\frac{1}{\frac{\sqrt{101}}{5}}=\frac{5}{\sqrt{101}}$$

4) Через точку $M(2,1,1)$ провести прямую, параллельную плоскостям $x+y+2z-1=0$ и $x-y+z+2=0$

Решение.

Будем искать уравнение прямой в канонической форме:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

здесь $x_1=x_M=2$, $y_1=y_M=1$, $z_1=z_M=1$

$\bar{R}=(l,m,n)$ – направляющий вектор прямой, его координаты найдём из уравнений плоскостей

$x+y+2z-1=0$ $\quad A_1=1 \quad B_1=1 \quad C_1=2 \quad D_1=-1$

$x-y+z+2=0$ $\quad A_2=1 \quad B_2=-1 \quad C_2=1 \quad D_2=2$

$$l=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1*1+2*1=3$$

$$m=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2*1-1*1=1$$

$$n=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1*1-1*1=-2$$

Ответ: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$

5) Решить уравнение $16z^4+4z^2+1=0$ (5)

$$z^2=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot16}}{32}=-\frac{1}{8}\pm\frac{\sqrt{3}}{8}i,\ z_1^2=-\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}i,\ z_2^2=-\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}i$$

Запишем z_1^2 в тригонометрической форме

$$|z_1^2|=\sqrt{\left(-\frac{1}{8}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2}=\frac{1}{4},\ \arg z_1^2=\operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{8}\Big/-\frac{1}{8}\right)=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\frac{2\pi}{3}$$

$$z_1^2=\frac{1}{4}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_1=\sqrt{z_1^2}=\left\{\sqrt{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{-\frac{2}{3}\pi+2\pi k}{2}\right]:k=0,1\right\}=$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),\ \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]\right\}$$

Запишем $z_2^2=-\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}i$ в тригонометрической форме

$$|z_2^2|=|z_2^2|=\frac{1}{4},\ \arg z_2^2=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\Big/-\frac{1}{8}\right)=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}$$

$$z_2^2=\frac{1}{4}\left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$z_2=\sqrt{z_2^2}=\left\{\sqrt{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{2}{3}\pi+2\pi k}{2}\right]:k=0,1\right\}=$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right],\ \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2\pi}{3}\right]\right\}$$

Ответ: корни уравнения:

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right],\ \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right],\ \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$$